В изложении доцента БГТУ Сахарова В.Ю.

Пусть произведено N опытов со случайной величиной имеющей распределение Пуассона с параметром λ Получены N значений (целые неотрицательные числа): X_1, X_2, … X_N. Согласно центральной предельной теореме сумма большого количества одинаково распределённых независимых случайных величин (имеющих математические ожидания и дисперсии) с ростом числа слагаемых стремиться к нормальной случайной величине. Обозначим $Y=\sum_{i=1}^{N}X_i$. При большом числе испытаний N случайная величина Y приближённо может считаться нормальной. Для упрощения её можно «центрировать» (то есть вычесть из неё её же математическое ожидание, чтобы в итоге математическое ожидание оказалось равно нулю) и «нормировать» (то есть разделить на её же среднеквадратическое отклонение, чтобы в итоге дисперсия оказалась равна единице). Математическое ожидание в каждом отдельном испытании $EX_i=\lambda$, а дисперсия $DX_i=\lambda$. Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий $EY=E\sum_{i=1}^{N}X_i=\sum_{i=1}^{N}EX_i=\sum_{i=1}^{N}\lambda=N\lambda$. Дисперсия суммы в силу независимости испытаний друг от друга равна сумме дисперсий $DY=D\sum_{i=1}^{N}X_i=\sum_{i=1}^{N}DX_i=\sum_{i=1}^{N}\lambda=N\lambda$. Среднеквадратическое отклонение $\sigma(Y)=\sqrt{DY}=\sqrt{N\lambda}$. Итак, стандартное нормальное распределение будет иметь величина $Z=\frac{Y-EY}{\sigma(Y)}=\frac{Y-N\lambda}{\sqrt{N\lambda}}$. Выберем достаточно большую вероятность β (по мнению исследователя равную вероятности практически достоверного события) и построим интервал (-c;c) практически гарантировано содержащий случайную величину Z. Очевидно, что чем больше будет эта вероятность, тем длиннее окажется этот интервал. Такую вероятность просто находить как разность значений функции распределения Φ(x) стандартного нормального распределения

$$P\left(-c<\frac{Y-N\lambda}{\sqrt{N\lambda}}<c\right)=P(-c<Z<c)=\Phi(c)-\Phi(-c)=\Phi(c)-(1-\Phi(c))=2\Phi(c)-1$$

По нашему условию эта вероятность равна β.

$$2\Phi(c)-1=\beta$$

$$2\Phi(c)=1+\beta$$

$$\Phi(c)=\frac{1+\beta}{2}$$

В программе Microsoft Office Excel встроена функция НОРМСТОБР(вероятность), с помощью которой можно находить значения функции, обратной к функции распределения Φ(x). Обозначим здесь эту функцию G(x). Тогда

$$c=G\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

Итак, c это известное число и можно относительно неизвестного параметра λ разрешить неравенство

$$-c<\frac{Y-N\lambda}{\sqrt{N\lambda}}<c$$

Возведём это неравенство в квадрат.

$$\frac{(Y-N\lambda)^2}{N\lambda}<c^2$$

И получим квадратное неравенство.

$$(Y - N\lambda)^2 < N\lambda c^2$$
$$Y^2 - 2YN\lambda + N^2\lambda^2 < N\lambda c^2$$
$$Y^2 - 2YN\lambda - N\lambda c^2 + N^2\lambda^2 < 0$$
$$N^2\lambda^2 - N\left(2Y + c^2\right)\lambda + Y^2 < 0$$

Коэффициент при квадрате положительный, поэтому решением неравенства будет промежуток, ограниченный корнями соответствующего квадратного уравнения. Найдём эти корни с помощью дискриминанта.

$$D = N^2\left(2Y + c^2\right)^2 - 4N^2Y^2 = N^2\left(4Y^2 + 4Yc^2 + c^4\right) - 4N^2Y^2 =$$
$$= 4N^2Y^2 + 4N^2Yc^2 + N^2c^4 - 4N^2Y^2 = 4N^2Yc^2 + N^2c^4 > 0$$

Корни квадратного уравнения найдутся по известной формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{N\left(2Y + c^2\right) \pm \sqrt{4N^2Yc^2 + N^2c^4}}{2N^2} = \frac{N\left(2Y + c^2\right) \pm N\sqrt{4Yc^2 + c^4}}{2N^2} =$$
$$= \frac{2Y + c^2 \pm \sqrt{4Yc^2 + c^4}}{2N} =$$

Может быть интересно выразить результат через выборочное среднее $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = \frac{Y}{N}$ подставив $Y = N\overline{X}$, тогда

$$= \frac{2N\overline{X} + c^2 \pm \sqrt{4N\overline{X}c^2 + c^4}}{2N} = \overline{X} + \frac{c^2}{2N} \pm \sqrt{\frac{\overline{X}c^2}{N} + \frac{c^4}{4N^2}} = \overline{X} + \frac{c^2}{2N} \pm \sqrt{\frac{\overline{X}c^2}{N} + \left(\frac{c^2}{2N}\right)^2}$$

Решением квадратного неравенства будет

$$\overline{X} + \frac{c^2}{2N} - \sqrt{\frac{\overline{X}c^2}{N} + \left(\frac{c^2}{2N}\right)^2} < \lambda < \overline{X} + \frac{c^2}{2N} + \sqrt{\frac{\overline{X}c^2}{N} + \left(\frac{c^2}{2N}\right)^2}$$

То есть доверительным интервалом для параметра λ при доверительной вероятности β является промежуток

$$\left(\overline{X} + \frac{c^2}{2N} - \sqrt{\frac{\overline{X}c^2}{N} + \left(\frac{c^2}{2N}\right)^2}; \overline{X} + \frac{c^2}{2N} + \sqrt{\frac{\overline{X}c^2}{N} + \left(\frac{c^2}{2N}\right)^2}\right)$$

Где $c = G\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$.

Заметим, что центр этого интервала несколько превосходит среднее $\overline{X}$.